

STUDENTSKÉ PROJEKTY DO PŘEDMĚTU OPT/MF

Petr Klapka

2014

e-mail: petr.klapka89@gmail.com

I Homogenní Burgersova rovnice

Burgersova rovnice je jednou ze základních rovnic hydrodynamiky. Jedná se o nelineární parciální diferenciální rovnici druhého řádu. Rovnice je pojmenována po holandském matematikovi Johannovi Martinusovi Burgersovi (1895–1981)[2].

Pro odvození homogenní Burgersovy rovnice můžeme použít rovnici kontinuity (I.2)- zákon zachování hmotnosti. Vezměme v tekutině libovolný element Ω . Pak jistě bude platit následující rovnost

$$-\int_{\Omega} \partial_t u \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{f} \, d\mathbf{S} = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{f} \, d\Omega, \quad (\text{I.1})$$

kde $u(\mathbf{x}, t)$ je hustota tekutiny v místě \mathbf{x}^1 a v čase t a $\mathbf{f}(u) = u \cdot \mathbf{v} \in C(\mathbb{R})$ je funkce modelující plošnou hustotu proudu tekutiny a $d\mathbf{S}$ myslíme povrchový element Ω . Neboť jsme volili element Ω zcela libovolně, rovnice (I.1) na něm nezávisí. Potom tedy můžeme psát rovnici kontinuity takto

$$\partial_t u + \nabla \cdot \mathbf{f} = 0. \quad (\text{I.2})$$

V jedné dimenzi můžeme rovnici (I.2) psát jako

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0.$$

Modelujeme-li $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ obdržíme Burgersovu rovnici (I.3), kterou jsme řešili.

$$\partial_t u + u \cdot \partial_x u = 0 \quad (\text{I.3})$$

Poznamenejme ještě, že rovnice (I.3) je v jedné dimenzi speciálním případem obecné PDE 2. řádu

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = \nu \partial_{xx}^2 u.$$

I.1 Zadání úlohy:

Mějme Burgersovu rovnici ve tvaru

$$\partial_t u + u \cdot \partial_x u = 0 \quad (\text{I.4})$$

na $[0; \infty) \times \mathbb{R}$ a počáteční podmínku $u(0; x_0) = u_0(x_0)$ na $\{0\} \times \mathbb{R}$. Hledáme její partikulární řešení.

I.1.1 Analytické řešení

Pokusme se nyní vyřešit Burgersovu rovnici analyticky. K řešení použijeme notaci zavedenou v Ref. [1] na straně 105 formule (31).

¹tučným řezem písma myslíme vektor

1. Rovnici přepíšeme do zavedené symboliky[1]. Volíme-li tedy $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$, $z(x, s) = u(\mathbf{x}(s))$ a $\mathbf{p}(s) = (\partial_s u(\mathbf{x}(s)), \partial_x u(\mathbf{x}(s)))$, (tučným řezem písma myslíme vektory) můžeme rovnici přepsat do tvaru

$$\partial_t u + u \cdot \partial_x u = 0 \quad \sim \quad F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) = 0.$$

Tedy

$$F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) = p_1 + zp_2 = 0 \quad (\text{I.5})$$

2. Dle Ref. [1] lze najít množinu křivek na kterých je řešení rovnice (I.3) konstantní. Tyto křivky nazýváme charakteristiky. Dále dle ref. [1] pro nalezení charakteristik $x = x(s, C)$ platí soustava ODE 1 (I.6).

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}(s) &= -D_x F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) - D_z F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{p}(s) \\ \dot{z}(s) &= D_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{p}(s) \\ \dot{\mathbf{x}}(s) &= D_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

Aplikací (I.6) na naší rovnici dostáváme tuto soustavu rovnic.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= (-p_1 p_2, -p_2^2) \\ \dot{\mathbf{x}} &= (1, z) \\ \dot{z} &= p_1 + zp_2 \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

3. Podle zadání víme, že $\dot{z} = 0 \rightarrow z = konst. = E$.

4. Druhá a třetí rovnice ze systému (I.7) mají řešení:

$$\begin{aligned} x_1 = s + D \quad x_1(0) = 0 &\Rightarrow x_1 = s \\ x_2 &= Es + C \\ z = E &= u_0(x_0) \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

kde $C, D, E \in \mathbb{R}$ jsou pro nás konstanty a $s \in [0; \infty)$ je parametr.

5. Vrátime-li se k původním proměnným $s \equiv t$, $x \equiv x_2$ a přepíšeme-li rovnice (I.8) lze psát

$$x(t, x_0) = u_0(x_0) \cdot t + C \quad \forall C \in \mathbb{R}, t \in [0, \infty)$$

Víme-li dále, že $u(t = 0, x_0) = u_0(x_0)$, můžeme najít parametr C jako:

$$\begin{aligned} x_0 &= u_0(x_0) \cdot 0 + C \\ C &= x_0. \end{aligned}$$

6. Řešení naší rovnice lze tedy psát jako

$$x = u_0(x_0) \cdot t + x_0 \quad (\text{I.9})$$

$$u(x, t) = u_0(x_0) \quad (\text{I.10})$$

Řešení jsme tedy našli v implicitním tvaru. Chceme-li znát funkční hodnotu řešení v bodě (x, t) je třeba vyjádřit z (I.9) x_0 a dosadit do formule (I.10).

I.1.2 Numerické řešení

Nyní jsme hledali řešení rovnice (I.3) numericky. Zřejmě můžeme přepsat tuto rovnici na tvar

$$\partial_t u = -u \cdot \partial_x u \quad \rightarrow \quad u = u_0 - \int_0^t u(x, s) \cdot \partial_x u(x, s) ds \quad (\text{I.11})$$

Rovnost $u = u_0 - \int_0^t u(x, s) \cdot \partial_x u(x, s) ds$ už můžeme řešit numericky např. obdelníkovou formulí I.13.

$$u = u_0 - krok \cdot \sum_{i=0}^t u(x, i) \cdot \partial_x u(x, i). \quad (\text{I.12})$$

Dále lze použít aproximaci derivace centrální aproximací $\partial_x u(x, i) = \frac{u(x(j+1, i) - x(j-1, i))}{2 \cdot dt}$. Výraz (I.13) pak přejde do tvaru

$$u(x, i + 1) = u_0(x) - krok \cdot \sum_{i=0}^t u(x, i) \cdot \frac{u(x(j+1, i) - x(j-1, i))}{2 \cdot dt}.$$

Dále uvádíme m-script pro řešení v programu GNU Octave. Na obrázcích Obr. I.1.2 a je vykresleno řešení úlohy pro $t = 0$ a pro $t = 1.03$. Na Obr. je znázorněno řešení rovnice pro počáteční podmínku $u_0(x) = \text{atan}(x)$ interval ($t \in [0; 0,05]$). Zde je vidět jak numerické řešení nedovede zachytit mnohoznačnost řešení.

```
dt=10^(-3);
dx=10^(-1);
T= 0.03;

x= -6:dx:6;
cas= 0:dt:T;
u= zeros(length(cas), length(x));
uu= zeros(length(x));
fix= length(cas);

poc= sin(x);

u(1, :) = poc;

pom = dt/(dx*2);

for i= 1:1:(length(cas)-1)

akt = u(i, :);
```

```

lev = [akt akt(length(akt))]; lev(1) = [];
prav = [akt(1) akt]; prav(length(prav)) = [];

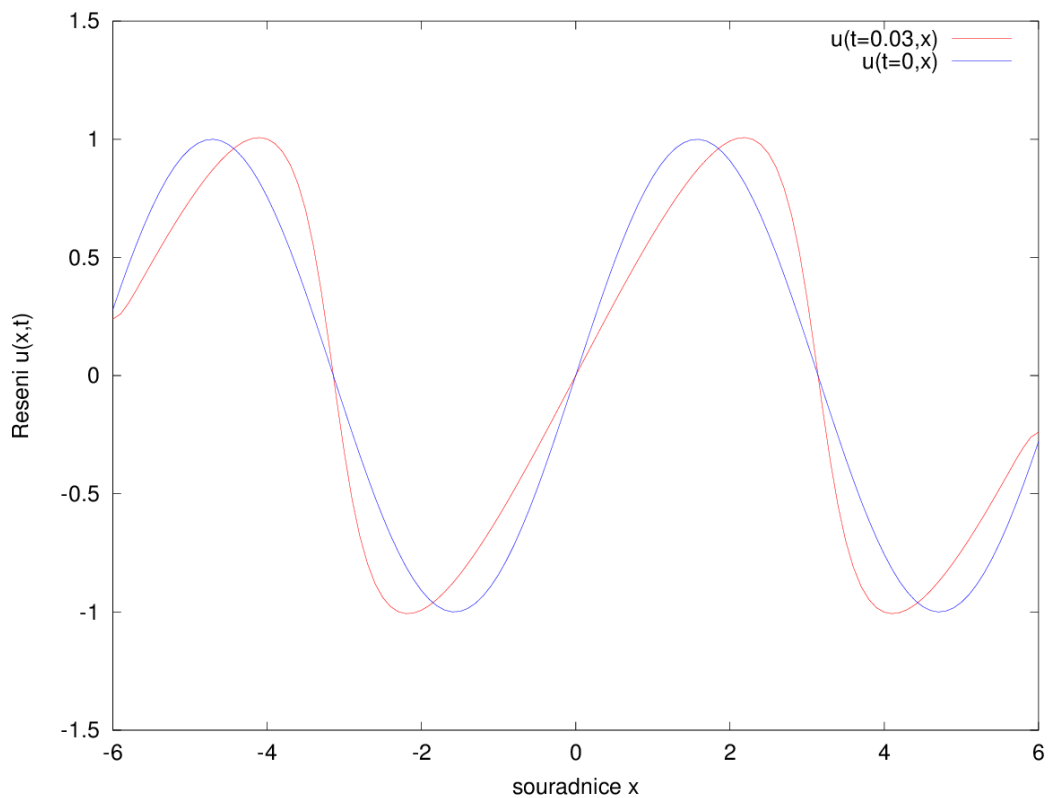
new = akt - pom*akt.*(lev - prav);
u(i+1,:) = new;

end

uu= u(fix,:);

plot(x,uu);
plot(x,uu,"-r;u(t=0.03,x);",x, sin(x),"-b;u(t=0,x);");
xlabel('souradnice x')
ylabel('Reseni u(x,t)')

```



Obr. 1: Výsledné řešení v čase 0.03 a počáteční řešení $\sin(x)$

Reference

- [1] EVANS L. C.: *Partial Differential Equations*, American Soc. vol. 19, (2010), 749 s.
- [2] [www.wikipedia.org](http://en.wikipedia.org) Dostupné z: <http://en.wikipedia.org/wiki/Burgers>

II Seskok Felixe Baumgartnera

14. října 2012 v Roswellu v americkém státě Nové Mexiko vystoupal rakušan Felix Baumgartner v návratové kapsli nesené heliovým balónem do výšky kolem 39 000 m, odkud seskočil.[2]. Při volném pádu se mu podařilo překonat rychlostní rekord. Felixovi Baumgartnerovi se podařilo při tomto seskoku překonat rychlost zvuku ve vzduchu.

II.1 Matematický model:

Pro modelování pádu F. B. lze požit 2. Newtonův pohybový zákon. Je-li $h(t)$ výška ve které se nachází parašutista F. B. pak lze sestavit diferenciální rovnici ve tvaru:

$$m \cdot \partial_{tt}^2 h(t) = -m \cdot g + \frac{1}{2} C S \rho(h) (\partial_t h(t))^2. \quad (\text{II.13})$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je koeficient odporu vzduchu, $S \in \mathbb{R}$ je maximální příčný průřez parašutisty a $\rho = \rho(h) \in C(\mathbb{R})$ je hustota vzduchu v bodě h .

Ukážeme nyní modeláž funkce $\rho = \rho(h)$. Z Eulerových rovnic hydrodynamiky plyne následující rovnice:

$$\frac{dp}{dh} = -\rho(h) \cdot g.$$

kde $p = p(h)$ je hodnota atmosferického tlaku ve výšce h . Víme-li, že p_0 je hodnota atmosferického tlaku v nulové výšce (tuto výšku předpokládáme jako dopadovou parašutisty), můžeme psát závislost atmosferického tlaku na výšce h brát ve tvaru:

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{g\rho_0}{p_0} h}.$$

Ekvivalentně můžeme chápat formuli pro hodnotu hustoty vzduchu ve výšce h jako

$$\rho(h) = \rho_0 \cdot e^{-\frac{g\rho_0}{p_0} h}. \quad (\text{II.14})$$

Úloha je tedy modelována následující ODE 2. řádu ve tvaru

$$\partial_{tt}^2 h(t) = -g + \frac{1}{2m} C S \rho(h) (\partial_t h(t))^2. \quad (\text{II.15})$$

II.1.1 Numerické řešení

Diferenciální rovnici jsme řešili numericky pomocí software GNU Octave. K řešení jsme užili Ralstonovu metodu[1]. Podle ref [1] (str.14) se jedná o tříkrokovou (počítáme hodnotu ve 3 bodech fce f) jednobodovou (potřebujeme jeden předchozí bod) explicitní Runge-Kuttovu metodu. Je tedy

podmíněně stabilní. Následně uvádíme kód programu, který obsahuje mimo jiné i volbu konstant. Na obrázcích č. II.1.1, II.1.1 a II.1.1 jsou znázorněny výsledné závislosti $h = h(t)$ (Obr. II.1.1), $v = v(t)$ (Obr. II.1.1) a $h = h(t)$ (Obr. II.1.1).

```

dx = 1;
dt = 0.2;
H = 39000;

vel = 1000;
h = zeros(vel);
v = zeros(vel);
a = zeros(vel); T=dt*(vel-1);
k11 = zeros(vel);
k21 = zeros(vel);
k12 = zeros(vel);
k22 = zeros(vel);
k13 = zeros(vel);
k23 = zeros(vel);
t = 0:dt:T;

C = 0.8;
S = 0.65*0.45;
g = 9.81;
p0 = 101325;
r0 = 1.29;
m = 90;
K = (C*S*r0)/(2*m);
L = (r0*g)/(p0);

h(1)= H;
v(1)= 0;

for i= 1:length(h)
if h(i)>0

k21(i) = -g + K*exp(-L*(h(i)))*((v(i))^2);
k22(i) = -g + K*exp(-L*(h(i)+0.5*dt*k11(i)))*((v(i)+0.5*dt*k21(i))^2);
k23(i) = -g + K*exp(-L*(h(i)+(3/4)*dt*k12(i)))*((v(i)+(3/4)*dt*k22(i))^2);
k11(i) = v(i);
k12(i) = v(i)+0.5*dt*k21(i);
k13(i) = v(i)+(3/4)*dt*k22(i);

```



```

h(i+1) = h(i) + (1/9)*dt*(2*k11(i)+3*k12(i)+4*k13(i));
v(i+1) = v(i) + (1/9)*dt*(2*k21(i)+3*k22(i)+4*k23(i));

endif
end

a(1) = (v(2) - v(1))/(dt);
for i= 2:length(h)
if h(i)>0

a(i) = (v(i-1)-v(i+1))/(2*dt);

endif
end

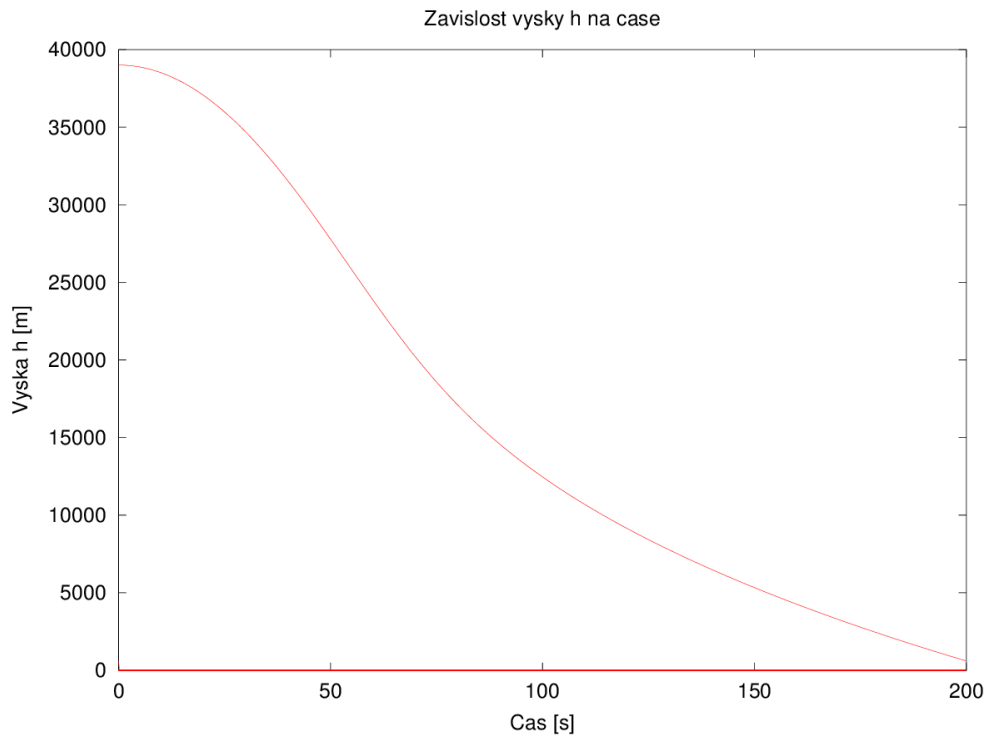
figure(1)
plot (t, h, 'r');
title('Zavislost vysky h na case');
xlabel('Cas [s]');
ylabel('Vyska h [m]');

figure(2)
plot (t, v, 'b');
title('Zavislost rychlosti v na case');
xlabel('Cas [s]');
ylabel('Rychlost [m/s]');
figure(3)
plot (t, a, 'b');
title('Zavislost zrychleni v na case');
xlabel('Cas [s]');
ylabel('Zrychleni [m/s^2]');

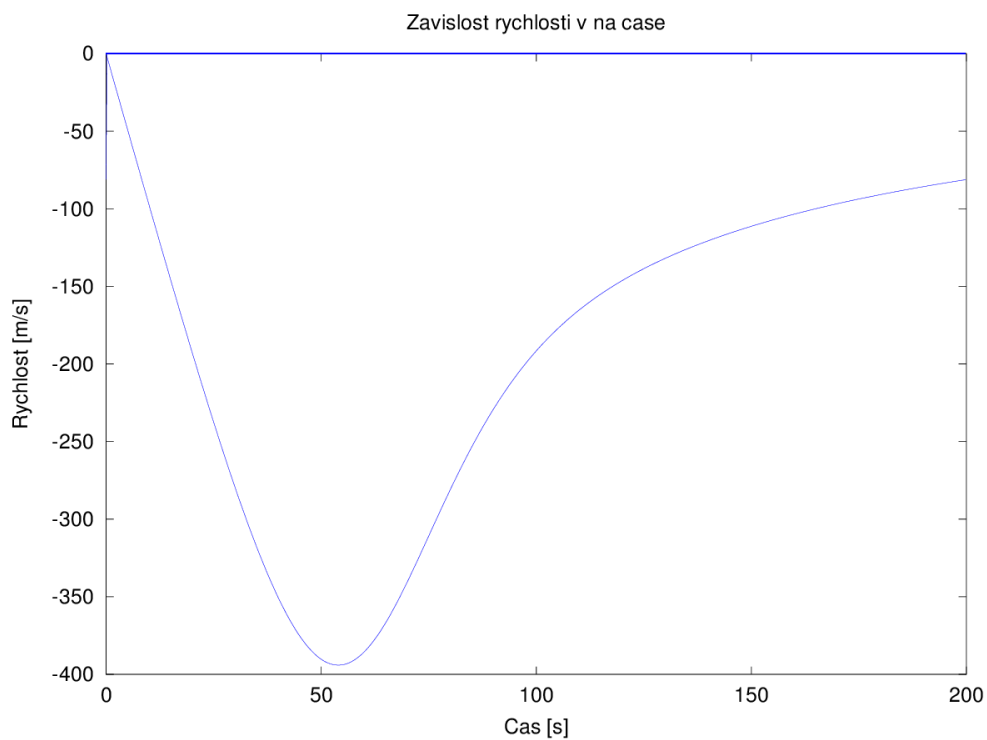
```

Závěr

Dle provedených výpočtů dosáhne Felix Baumgartner rychlosti cca. $390 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ v čase kolem cca. 50 s, což odpovídá výšce cca. 25 km.



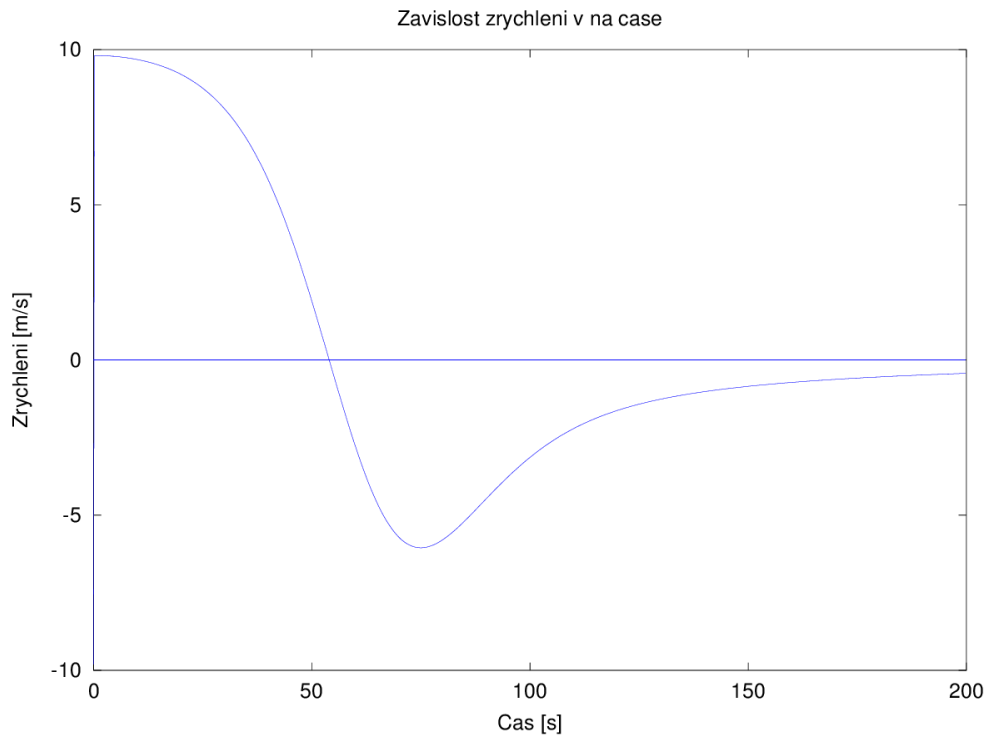
Obr. 2: Výsledná závislost výšky na čase



Obr. 3: Výsledná závislost rychlosti na čase

Reference

- [1] ČERMÁK L.: *Numerické metody pro řešení diferenciálních rovnic*, učební text pro FSI VUT v Brně.



Obr. 4: Výsledná závislost zrychlení na čase

[2] www.wikipedia.org

Dostupné z: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Felix-Baumgartner>

III Duffingova rovnice

Duffingova rovnice je nelineární model oscilátoru a má tvar:

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma \cos(\omega t) \quad (\text{III.16})$$

kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ jsou konstanty. Rovnice může například popisovat výchylku z rovnovážné polohy mechanického oscilátoru. Člen s koef. α odpovídá odporové (vratné) síle pružiny, koeficient β charakterizuje "tvrdnutí" ($\beta > 0$) či "měknutí" ($\beta < 0$) pružiny, člen s δ je úměrný odporové síle tlumiče a koeficient γ představuje amplitudu budící síly a ω představuje úhlovou frekvenci.

Odvození:

Mějme mechanický oscilátor, který je reprezentován hmotným bodem o hmotnosti m a tlumící soustavou ocelová pružina o tuhosti $K(x)$ s hydraulickým tlumičem s koeficientem tlumení Δ . Dále předpokládejme že tuhost pružiny je popsána formulí

$$K(x) = Ax + Bx^3.$$

kde x je výchylka z rovnovážné polohy hmotného bodu o hmotnosti m . Předpokládáme-li dále, že tento oscilátor budíme harmonickou silou $F_B = \Gamma \cos(\omega t)$. Pak můžeme psát pohybovou rovnici pro tento oscilátor (druhý Newtonův pohybový zákon) ve tvaru

$$m\ddot{x} = -\Delta\dot{x} - (Ax + Bx^3) + \Gamma \cos(\omega t). \quad (\text{III.17})$$

Zavedeme-li $A = m \cdot \alpha$, $B = \beta \cdot m$, $\Gamma = \gamma \cdot m$ a $\Delta = \delta \cdot m$, můžeme rovnici (III.17) přepsat do tvaru (III.16).

III.1 Numerické řešení rovnice

Rovnici (III.16) jsme řešili numericky v programu GNU Octave. Nejprve jsme k výpočtu použili Ralstonovu metodu[1] (explicitní metodu typu Runge-Kutta), užitou již v podkapitole II.1.1 a následně metodu "centrální diference". Pro srovnání jsme výsledky vynesli do jednoho grafu (Obr. 5 až Obr. ??). Nyní ukážeme pouze metodu centrální diference. Položíme-li $\dot{x} = v$ můžeme rovnici 2. řádu přepsat na soustavu prvního řádu ve tvaru

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\delta v - \alpha x - \beta x^3 + \gamma \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

Soustavu můžeme řešit numericky použijeme-li centrální diferenci místo časové derivace. Pokládáme tedy

$$\dot{x} = \frac{x(t(i+1)) - x(t(i-1)))}{2dt}.$$

Nyní uvádíme zdrojový kód výpočtu v programu Octave.

```
x0= input('Zadejte x0:');
v0= input('Zadejte v0:');

dt = 0.01;

vel = 1000;
x = zeros(vel);
v = zeros(vel);
T= dt*(vel-1);

% RALSTONOVA METODA

k11 = zeros(vel);
k21 = zeros(vel);
k12 = zeros(vel);
k22 = zeros(vel);
k13 = zeros(vel);
k23 = zeros(vel);
t = 0:dt:T;

a= 5;
b= 4;
g= 3;
de=2;
o= 6;

x(1)= x0;
v(1)= v0;

for i= 1:length(t)

k21(i) = g*cos(o*(t(i)))-de*(v(i))-a*(x(i))-b*(x(i))^3;
k22(i) = g*cos(o*(t(i)))-de*(v(i)+0.5*dt*k21(i))-a*(x(i)
+0.5*dt*k11(i))-b*(x(i)+0.5*dt*k11(i))^3;
k23(i) = g*cos(o*(t(i)))-de*(v(i)+(3/4)*dt*k22(i))-a*(x(i)
+(3/4)*dt*k12(i))-b*(x(i)+(3/4)*dt*k12(i))^3;
k11(i) = v(i);
k12(i) = v(i)+0.5*dt*k21(i);
```

```

k13(i) = v(i)+(3/4)*dt*k22(i);

x(i+1) = x(i) + (1/9)*dt*(2*k11(i)+3*k12(i)+4*k13(i));
v(i+1) = v(i) + (1/9)*dt*(2*k21(i)+3*k22(i)+4*k23(i));

end

%METODA CENTRALNI DIFERENCE
dtt=0.001; ca= dtt*(vel-1);

p= vel;
xx= zeros(1,p);
y= zeros(1,p);
tt=0:dtt:T;
d= length(xx) - 1;
xx(1)= x0;
y(1)= v0;

xx(2) = xx(1) + dtt*(y(1));
y(2)= y(1) + dtt*(- de*y(1) - a*xx(1) - b*((xx(1))^3) + g*cos(o*tt(1)));
%Odhad 2 bodu

for j= 2:d

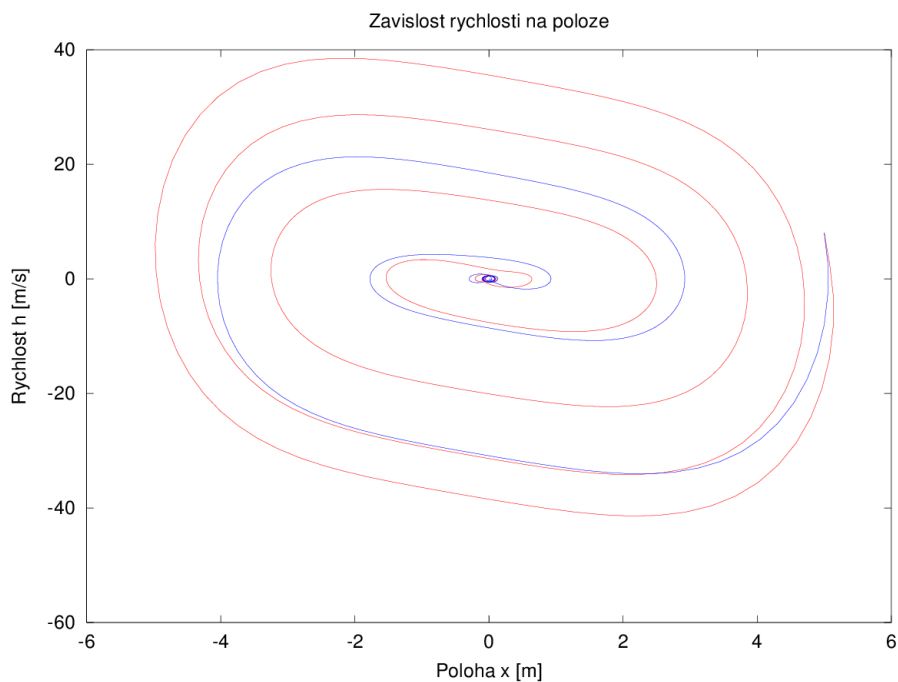
xx(j+1) = xx(j-1) + 2*dtt*(y(j));
y(j+1)= y(j-1) + 2*dtt*(- de*y(j) - a*xx(j) - b*((xx(j))^3) +
g*cos(o*tt(j))); % Vypocet dalsich bodu

end

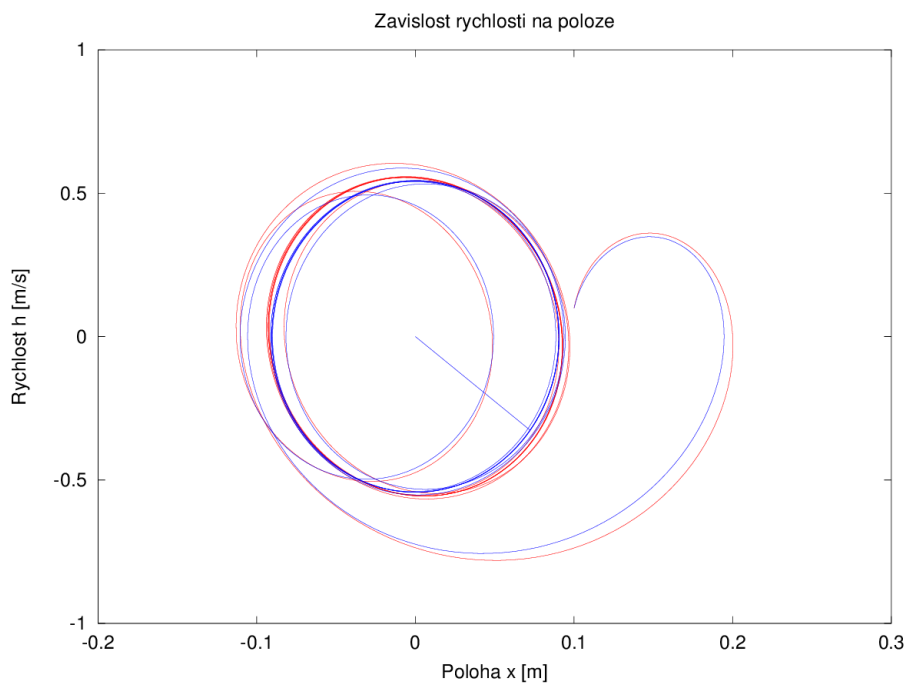
% overeni pomoci solveru
options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-4);
[t, xxx] = ode45(duffezad,[0 T],[x0 v0],options);

plot(xx,y,"-r", x,v,"-b",xxx(:,1),xxx(:,2),'-g')
title('Zavislost rychlosti na poloze');
xlabel('Poloha x [m]');
ylabel('Rychlost h [m/s]');

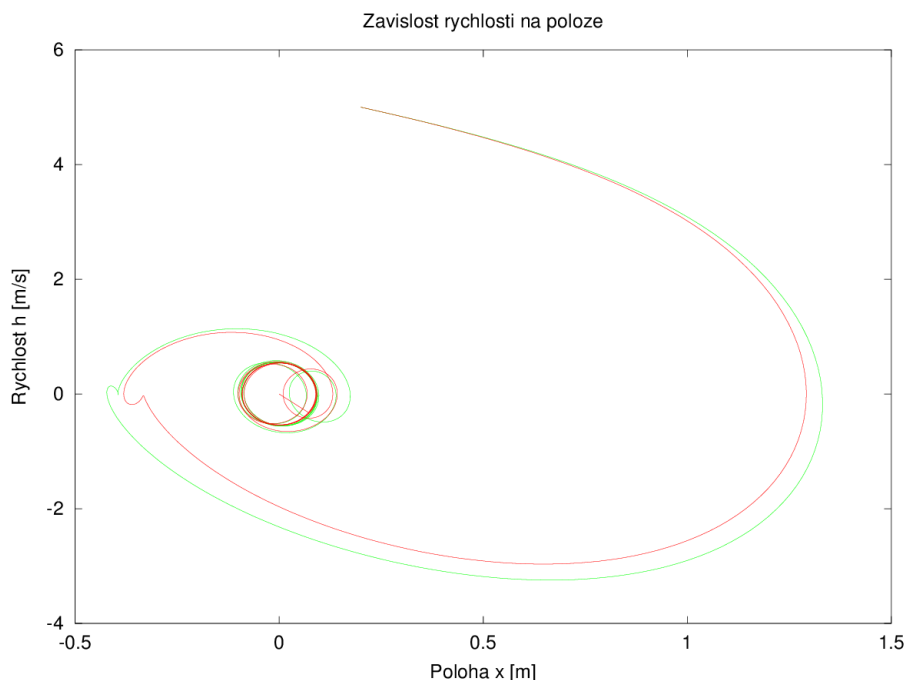
```



Obr. 5: Řešení Duffing. rovnice pro počáteční podmínky $x_0 = 5$ a $v_0 = 8$



Obr. 6: Řešení Duffing. nehomogenní rovnice pro počáteční podmínky $x_0 = 0,1$ a $v_0 = 0,1$



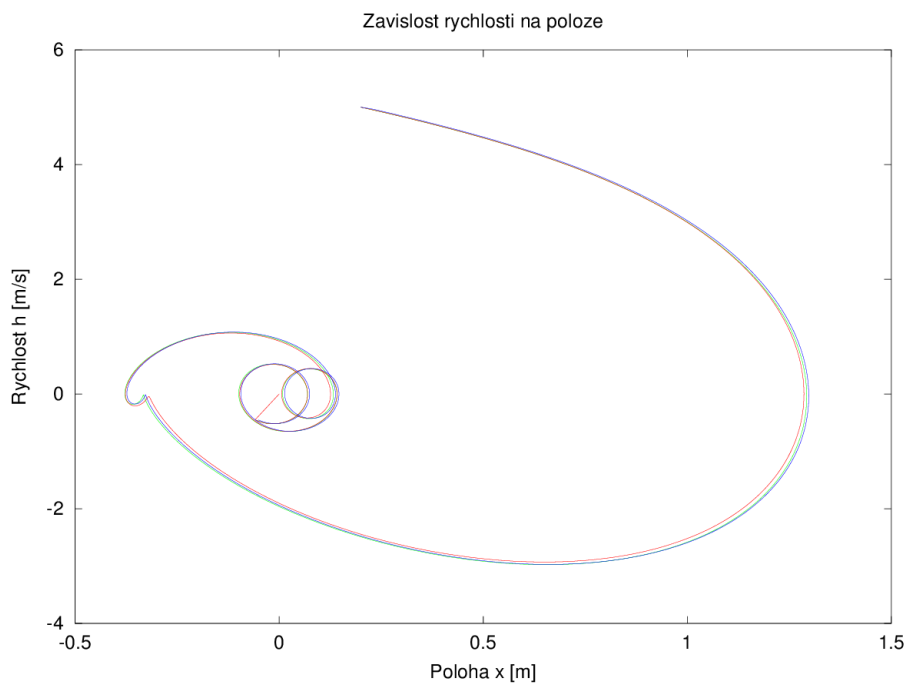
Obr. 7: Porovnání řešení Ralston. a RK4-5 metody pro počáteční podmínky $x_0 = 0,2$ a $y_0 = 5$

Obr. 5 a Obr. 6) ukazují řešení rovnice (III.16) pro $\alpha = 5, \beta = 4, \gamma = 3, \delta = 2$ a $\omega = 6$. Modrá křivka vždy odpovídá řešení pomocí Ralstonovy metody, červená křivka pak odpovídá řešení pomocí centrální diference. Na Obr. 5 je znázorněno řešení pro počáteční podmínky $x_0 = 5$ a $v_0 = 8$. Zde zjevně dochází k postupnému utlumení až do stavu, kterému říkáme atraktor, čili pevný bod zobrazení (III.18). Obr. 6 ukazuje fázový portrét pro buzený oscilátor pro počáteční podmínky $x_0 = 0.1$ a $v_0 = 0.1$. Pro oba případy zjevně dochází k vytvoření atraktoru.

Závěr

Tato simulace porovnává Ralstonovu metodu (modrá křivka) a "primitivní" metodu centrální diference (červená křivka). Výsledné závislosti ukazují, že Ralstonova metoda dává řešení, která "rychleji" konvergují ke svému pevnému bodu. Tento fakt asi nejlépe demonstruje Obr. 5.

Nakonec jsme ještě porovnali Ralstonovu metodu s jinou Runge-Kuttovou metodou, implementovanou v GNU Octave. Použitá `ode45` je procedura která užívá čtyřkrokovou pětibodovou explicitní R-K metodu (RK4-5). Obr. 7 ukazuje srovnání této metody (zelená křivka) s užitou Ralstonovou metodou (červená křivka) s krokem $dt = 0,01$ s (pro obě metody) pro počáteční podmínky $x_0 = 0.2$ a $v_0 = 5$. Obě metody jsou stabilní a dávají podobné výsledky. Na Obr. 8 je vykresleno řešení všech tří metod pro tyto počáteční podmínky, kde jsme použili krok $dt = 0,001$ s pro metodu centrální diference a krok $dt = 0,01$ s pro metodu Ralstonovu. Procedura pro RK4-5 mění krok dynamicky. Pro přesnější řešení metody centrální diference jsme museli použít desetkrát jemnější krok,



Obr. 8: Porovnání řešení Ralston., centrální difference a RK4-5 metody pro počáteční podmínky $x_0 = 0,2$ a $y_0 = 5$

abychom dosáhli přibližně stejné přesnosti jako metoda RK4-5 a Ralstonova metoda. Pro výpočet bychom proto doporučili raději metodu RK4-5, případně Ralstonovou metodu, které počítají daleko efektivněji.

Reference

- [1] ČERMÁK L.: *Numerické metody pro řešení diferenciálních rovnic*, učební text pro FSI VUT v Brně.